EXERCICE N°1 : 30' 5 points

Soit $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ un repère orthonormé direct de l'espace ξ.

On considère les points *A, B* et *C* de coordonnées respectives : $A(1;1;0)$; $B(-1;2;2)$ et $C(-2;1;3)$.

1°) a) Calculer le produit vectoriel $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$.

b) Déduire l'aire du triangle *ABC*.

c) Déterminer une équation cartésienne du plan (ABC).

2°) Soit *P* le plan d'équation : $x+z-1=0$ et *Q* le plan d'équation : $x-z-1=0$.

a) Justifier que : $P\perp Q$.

b) Déterminer une représentation paramétrique de $P\cap Q$.

3°) Soit *S* l'ensemble des points $M(x,y,z)$ tels que : $x^2+y^2+z^2-2x+2z+1=0$.

a) Justifier que *S* et une sphère dont on précisera le centre *I* et le rayon *R*.

b) Démontrer que *S* et *P* sont sécants suivant un cercle dont on précisera le centre *H* et le rayon *r*.

4°) Soit α un paramètre réel appartenant à l'intervalle $[0,\pi]$.

On considère les points *E, F* et *N* de l'espace ξ tels que :

$E(2,0,-1)$; $F(0,0,-1)$ et $N(1+\cos^2\alpha;\sqrt{2}\sin\alpha\cos\alpha;-\cos^2\alpha)$.

a) Vérifier que *E* et *F* sont diamétralement apposés sur la sphère *S*.

b) Calculer $\overrightarrow{NE}.\overrightarrow{NF}$. Que peut-on conclure ?

c) Vérifier que $N\in P$.

d) Déduire sur quelle ligne varie *N* lorsque α varie.

5°) a) Montrer que $ON^2=1+4\cos^2\alpha$.

b) Pour quelle (s) valeur (s) de *a* la distance ON^2 est-elle minimale?

EXERCICE N°2 : 30' 5 points

On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) suivante : $z^3-2(\sqrt{3}+i)z^2+4(1+i\sqrt{3})z-8i=0$.

1°) a) Montrer que (E) admet une solution imaginaire pure que l'on précisera.

b) Résoudre (E) dans $\mathbb{C}$.

c) Donner la forme exponentielle de chacune des solutions de (E).

2°) Soit θ un réel et (E_θ) l'équation : $z^3-2e^{i\theta}(\sqrt{3}+i)z^2+4e^{2\theta}(1+i\sqrt{3})z-8ie^{i\theta}=0$.

a) Montrer que $(ze^{-i\theta})$ est solution de (E) si et seulement si *z* est solution de (E_θ).

b) Déduire les solutions de l'équation (E_θ).

3°) Représenter dans le plan rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$ les images des solutions des équations (E) et (E_θ), et vérifier qu'elles sont les sommets d'un polygone régulier.

Qarray.tn -Aqra Blech- Qarray.tn